Partiel méca des solides
mars 2013 -

A - Questions de cours. (5 pts)

1 - Moment d'inertie d'un disque homogène

Δ = axe de révolution (1) $I_\Delta = \iint_S (x^2+y^2)\sigma . dS = \sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi$

(2) $I_\Delta = \sigma \frac{R^4}{4} \times 2\pi$ avec $m = \sigma \pi R^2$ - $\boxed{I_\Delta = \frac{mR^2}{2}}$ (1)

2 - * **Moment cinétique d'1 solide avec 1 pt fixe O ∈ solide :**

$\vec{L}_O(S/R) = [I]_O \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$ (0,5)

* **Energie cinétique** : $\mathcal{E}_k(S/R) = \frac{1}{2} \vec{L}_O \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$ (0,5)

(3) **Cas général** : * th de Koenig relatif au moment cinétique :

$$\vec{L}_{O'}(S/R) = \vec{L}_G + \vec{O'G} \wedge M\vec{v}_{G/R} \quad (1)$$

ou $\vec{L}^*$

* th. de Koenig relatif à l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_k(S/R) = \mathcal{E}_k^* + \frac{1}{2} M \vec{v}_{G/R}^{\,2} \quad (1)$$

Réduction à friction

1) I contact sans glissement => mvt de rotation suivant l'axe $O\vec{Z}_0$

$$\vec{v}_{I_1 \in S_1/R} = e\dot{\Phi}\,\vec{Y}_2$$

2) => O_2 en rotation autour de l'axe $O\vec{Z}_0$

$$\vec{v}_{O_2 \in S_2/R} = e\dot{\psi}\,\vec{Y}_2$$

3) $\vec{\Omega}_{S_2/R} = \dot{\psi}\vec{Z}_0 + \dot{\theta}\vec{X}_2$ $\left\{\begin{array}{l}\text{mvt autour de } O\vec{Z}_0 \text{ avec } \dot{\psi} \\ \text{mvt autour de } O\vec{X}_2 \text{ avec } \dot{\theta}\end{array}\right.$

4) Mouvement composé avec celui de O_2 tel que

$$\vec{v}_{I_2 \in S_2/R} = \vec{v}_{O_2 \in S_2/R} + \vec{\Omega}_{S_2/R} \wedge \vec{O_2 I_2}$$

avec $\vec{O_2 I_2} = -r\vec{Z}_0$

$$= e\dot{\psi}\vec{Y}_2 + (\dot{\psi}\vec{Z}_0 + \dot{\theta}\vec{X}_2) \wedge -r\vec{Z}_0$$

$$= e\dot{\psi}\vec{Y}_2 + r\dot{\theta}\vec{Y}_2 = (e\dot{\psi} + r\dot{\theta})\vec{Y}_2$$

5) CRSG $\vec{v}_{I \in S_2/R} = \vec{v}_{I \in S_1/R}$

$$e\dot{\psi} + r\dot{\theta} = e\dot{\Phi} \iff e(\dot{\Phi} - \dot{\psi}) = r\dot{\theta}$$

6) $\vec{v}_{J_2 \in S_2/R} = \vec{0} = \vec{v}_{O_2 \in S_2/R} + \vec{\Omega}_{S_2/R} \wedge \vec{O_2 J_2}$ avec $\vec{O_2 J_2} = r\vec{Z}_0$

$$= e\dot{\psi}\vec{Y}_2 + (\dot{\psi}\vec{Z}_0 + \dot{\theta}\vec{X}_2) \wedge r\vec{Z}_0$$

$$= e\dot{\psi}\vec{Y}_2 - r\dot{\theta}\vec{Y}_2 = \vec{0} \iff e\dot{\psi} = r\dot{\theta}$$

7) $\rho = \dot{\psi}/\dot{\phi}$ $\quad e(\dot{\Phi} - \dot{\psi}) = e\dot{\psi} \iff \cancel{e}\dot{\Phi} = 2\cancel{e}\dot{\psi} \Rightarrow \rho = 1/2$